สเกลาร์ (scalar) คือปริมาณที่มีแต่ขนาด
เวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง

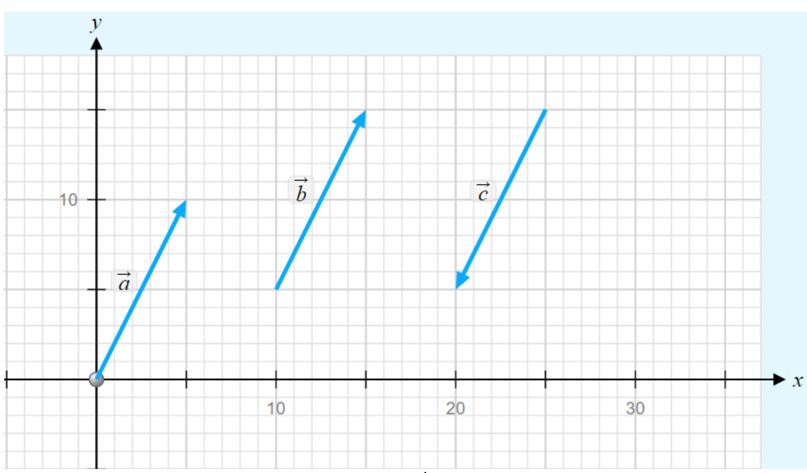
1. จงกากบาทหน้าปริมาณที่เป็นเวกเตอร์

___ มวล	___ ความเร็ว	___ พลังงาน
___ อัตราเร็ว	___ น้ำหนัก	___ แรง
___ โมเมนตัม	___ เวลา	___ ตำแหน่งของวัตถุ
___ ระยะทาง	___ ความเร่ง	___ การกระจัด
___ อุณหภูมิ	___ ความดัน	___ ทอร์ค
___ โมเมนต์ความเฉื่อย	___ ปริมาตร	___ พื้นที่

สัญกรณ์ของเวกเตอร์ (vector notation)
ปริมาณเวกเตอร์ถูกแทนด้วยตัวอักษรที่มีลูกศรอยู่ด้านบนหรือตัวอักษรตัวเข้ม เช่น $\vec{a}$ หรือ $\mathbf{a}$

การเท่ากันของเวกเตอร์
เวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เท่ากันก็ต่อเมื่อ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน

2. ในรูปที่ 1 เวกเตอร์ใดเท่ากัน ____________________



รูปที่ 1

ส่วนประกอบของเวกเตอร์ใน 2 มิติ (vector components in two dimensions)

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate system) เวกเตอร์ $\vec{d}$ ในรูปที่ 2 มีส่วนประกอบในแนวรัศมีหรือขนาดของเวกเตอร์เท่ากับ $|\vec{d}| = r = 20$ และมีทิศทางที่ทำมุม $\theta = 30^\circ$ เทียบกับแกน x เราสามารถแทนเวกเตอร์ $\vec{d}$ โดยใช้**สัญกรณ์ของเซตอันดับ** (ordered set notation) ได้เป็น $\vec{d} = \left(|\vec{d}|, \angle\theta\right) = (r, \angle\theta) = \left(20, \angle 30^\circ\right)$

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) ส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\vec{d}$ มีค่า d_x = 17.3 และ d_y = 10 ซึ่งเป็นเงาของเวกเตอร์ $\vec{d}$ ที่ถูกฉายลงเป็นแกน x และแกน y ตามลำดับ เราสามารถแทนเวกเตอร์ $\vec{d}$ ด้วยสัญกรณ์ของเซตอันดับได้เป็น $\vec{d} = (17.3, 10)$

ส่วนประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดทั้งสองระบบมีความสัมพันธ์กันตามสมการ

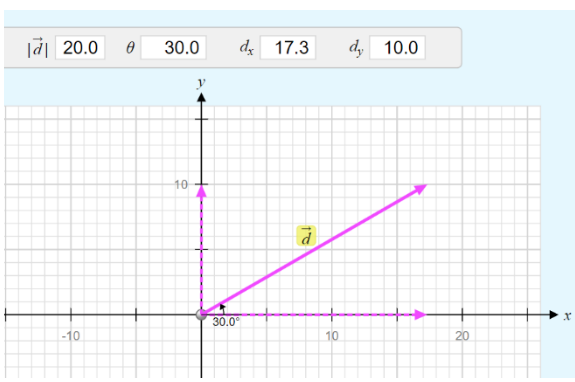
$$d_x = |\vec{d}|\cos\theta = r\cos\theta, \qquad d_y = |\vec{d}|\sin\theta = r\sin\theta$$

$$|\vec{d}| = r = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(d_y / d_x\right)$$

เรายังสามารถเขียนเวกเตอร์ด้วย**สัญกรณ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector notation) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศขนานกับแกน x และแกน y มีสัญลักษณ์เป็น $\hat{i} = (1, 0)$ และ $\hat{j} = (0, 1)$ ตามลำดับ เราสามารถแทนเวกเตอร์ $\vec{d}$ เป็น $\vec{d} = 17.3\hat{i} + 10\hat{j}$

นอกจากนี้ เรายังสามารถแทนเวกเตอร์ $\vec{d}$ ด้วย**สัญกรณ์เมทริกซ์** (matrix notation) ได้เป็น

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 17.3 \\ 10 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ \angle 30^\circ \end{bmatrix}$$



รูปที่ 2

✎ ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนมักถูกเรียกว่าระบบพิกัดฉาก (orthogonal coordinate system) ในระดับมัธยมศึกษา แล้วระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นระบบพิกัดฉากหรือไม่

3. จงใช้โปรแกรมการรวมเวกเตอร์ของ PhET เพื่อสร้างเวกเตอร์ต่อไปนี้ลงในกราฟ

$$\vec{a}=(5,7),\vec{b}=(-10,4),\vec{c}=(3,-5),\vec{d}=\left(14,\angle-20^{\circ}\right),\vec{e}=\left(11,\angle115^{\circ}\right),\vec{f}=\left(9,\angle-130^{\circ}\right)$$

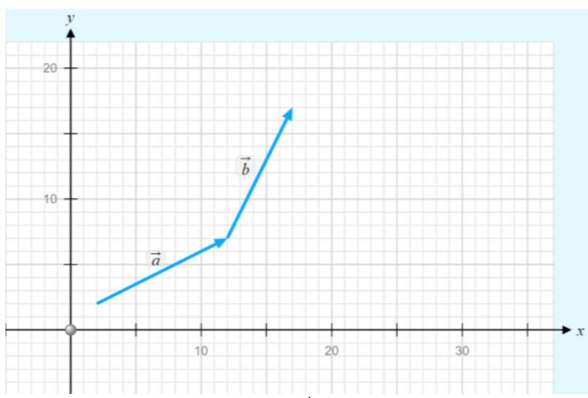
4. จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ จากข้อ 3 ในรูปของส่วนประกอบในระบบพิกัดเชิงขั้ว $(r,\angle\theta)$

5. จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{d},\vec{e},\vec{f}$ จากข้อ 3 ในรูปของส่วนประกอบในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x,y)

6. จงหาขนาดและมุมเทียบกับแกน x ของเวกเตอร์ต่อไปนี้ $(8,2),(-8,5),(-7,-7),(10,-5)$

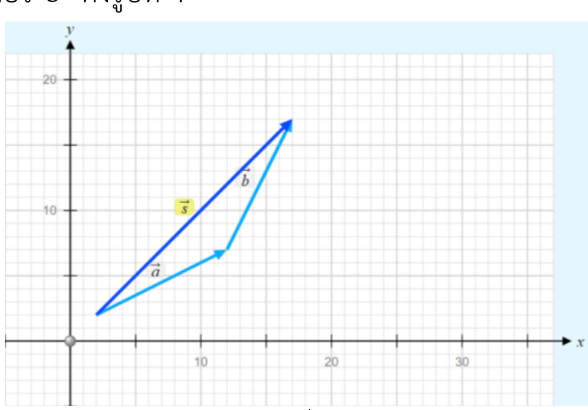
การบวกเวกเตอร์สองตัวด้วยวิธีเชิงกราฟิกส์ (adding two vectors using the graphics method)

การบวกเวกเตอร์ $\vec{a}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{b}$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{a}+\vec{b}$ สามารถทำได้โดยการนำหางของเวกเตอร์ $\vec{a}$ มาต่อที่หัวของเวกเตอร์ $\vec{b}$ ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

เวกเตอร์ลัพธ์ของการบวก $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$ คือเวกเตอร์ที่มีหางอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับหางของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และมีหัวอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับหัวของเวกเตอร์ $\vec{b}$ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

7. จงใช้โปรแกรมการรวมเวกเตอร์ของ PhET เพื่อสร้างเวกเตอร์สองตัวใด ๆ แล้วบวกเวกเตอร์ทั้งสองด้วยวิธีเชิงกราฟิกส์ และแสดงเวกเตอร์ทั้งหมดโดยใช้รูปแบบดังรูปที่ 4

สมบัติการสลับที่ของการบวกเวกเตอร์

เวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้จากการบวกเวกเตอร์ $\vec{a}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{b}$ เท่ากับเวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้จากการบวกเวกเตอร์ $\vec{b}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{a}$ นั่นคือ $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

8. จงใช้โปรแกรมการรวมเวกเตอร์ของ PhET เพื่อสร้างเวกเตอร์สองตัวใด ๆ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ แล้วแสดงให้เห็นว่าสมบัติการสลับที่ของการบวกเวกเตอร์เป็นจริง

การบวกเวกเตอร์หลายตัวด้วยวิธีเชิงกราฟิกส์ (adding many vectors using the graphics method)

การบวกเวกเตอร์ n ตัว $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n$ ด้วยวิธีเชิงกราฟิกส์ทำได้ขั้นตอนดังต่อไปนี้

ก. นำหางของเวกเตอร์ $\vec{a}_2$ มาต่อที่หัวของเวกเตอร์ $\vec{a}_1$

ข. นำหางของเวกเตอร์ $\vec{a}_3$ มาต่อที่หัวของเวกเตอร์ $\vec{a}_2$

ค. ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งหางของเวกเตอร์ $\vec{a}_n$ ต่อกับหัวของเวกเตอร์ $\vec{a}_{n-1}$

ง. เวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{s}$ คือเวกเตอร์ที่มีหางอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับหางของเวกเตอร์ $\vec{a}_1$ และมีหัวอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับหัวของเวกเตอร์ $\vec{a}_n$ ดังรูปที่ 5

รูปที่ 5

9. จงใช้โปรแกรมการรวมเวกเตอร์ของ PhET เพื่อสร้างเวกเตอร์ 5 ตัวใด ๆ แล้วบวกเวกเตอร์ทั้งหมดด้วยวิธีเชิงกราฟิกส์ และแสดงเวกเตอร์ทั้งหมดรวมทั้งเวกเตอร์ลัพธ์ดังรูปแบบในรูปที่ 5

การบวกเวกเตอร์สองตัวโดยใช้ส่วนประกอบ (adding two vectors using their components)

การบวกเวกเตอร์ $\vec{a}=\left(a_x,a_y\right)$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{b}=\left(b_x,b_y\right)$ ทำได้โดยการบวกส่วนประกอบของเวกเตอร์ทั้งสองเข้าด้วยกันดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{s}&=\vec{a}+\vec{b}\\&=\left(a_x+b_x,a_y+b_y\right)\end{aligned}$$

ในที่นี้เราเขียนเวกเตอร์ด้วยสัญกรณ์ของเซตอันดับ เราสามารถเขียนการบวกเวกเตอร์สองตัวด้วยสัญกรณ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{s}&=\vec{a}+\vec{b}\\&=\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}\right)+\left(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}\right)\\&=\left(a_x+b_x\right)\hat{i}+\left(a_y+b_y\right)\hat{j}\end{aligned}$$

การบวกเวกเตอร์สองตัวด้วยส่วนประกอบสามารถแสดงในรูปกราฟิกส์ได้ดังรูปที่ 6 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ของเวกเตอร์ลัพธ์มีค่าเท่ากับผลรวมของส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และเวกเตอร์ $\vec{b}$ ตามลำดับ

รูปที่ 6

10. จงใช้โปรแกรมการรวมเวกเตอร์ของ PhET เพื่อบวกเวกเตอร์ $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$ ดังต่อไปนี้

- $\vec{a}=\left(5,5\right),\vec{b}=\left(2,3\right)$ $\vec{s}=$
- $\vec{a}=\left(-4,0\right),\vec{b}=\left(3,4\right)$ $\vec{s}=$
- $\vec{a}=\left(5,\angle 30^\circ\right),\vec{b}=\left(5,\angle -30^\circ\right)$ $\vec{s}=$
- $\vec{a}=\left(4,\angle 120^\circ\right),\vec{b}=\left(3,\angle 45^\circ\right)$ $\vec{s}=$

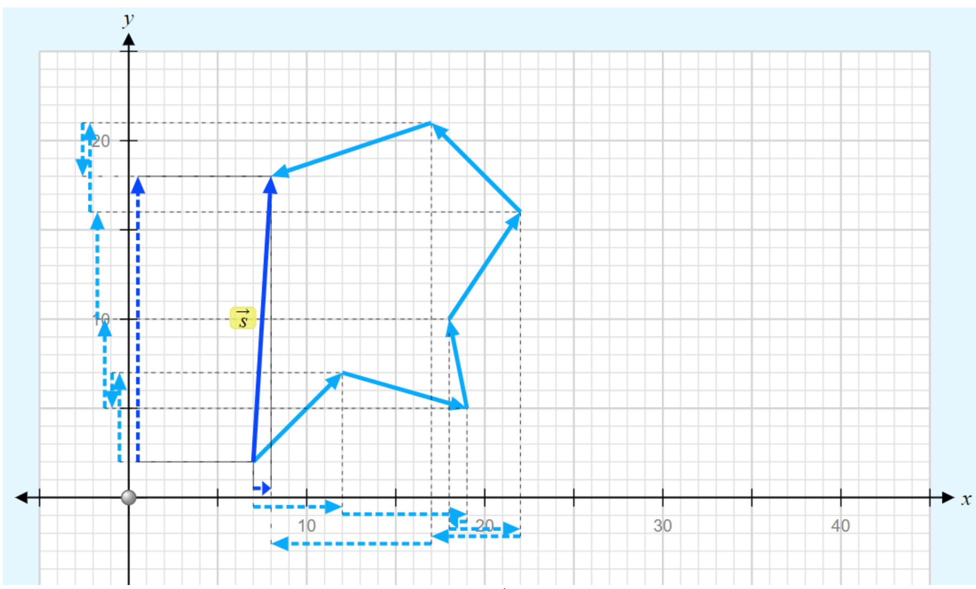
11. เมื่อ $\vec{a}=\left(5,\angle 30^{\circ}\right),\vec{b}=\left(5,\angle -30^{\circ}\right)$ เราสามารถคำนวณหาเวกเตอร์ลัพธ์ด้วยการบวกส่วนประกอบในแนวรัศมีและแนวมุมเป็น $\vec{s}=\left(5+5,\angle(30^{\circ}-30^{\circ})\right)=\left(10,\angle 0^{\circ}\right)$ ได้หรือไม่

การบวกเวกเตอร์หลายตัวด้วยส่วนประกอบ (adding many vectors using their components)

การบวกเวกเตอร์ n ตัว $\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$ ด้วยส่วนประกอบทำได้เช่นเดียวกับในกรณีการบวกเวกเตอร์สองตัว ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{s}&=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n\\&=\left(a_{1x}+a_{2x}+\cdots+a_{nx},a_{1y}+a_{2y}+\cdots+a_{ny}\right) && \text{สัญกรณ์ของเซตอันดับ}\\&=\left(a_{1x}+a_{2x}+\cdots+a_{nx}\right)\hat{i}+\left(a_{1y}+a_{2y}+\cdots+a_{ny}\right)j && \text{สัญกรณ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย}\end{aligned}$$

การบวกเวกเตอร์หลายตัวด้วยส่วนประกอบสามารถแสดงในรูปกราฟิกส์ได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7

12. จงหาเวกเตอร์ลัพธ์ของการบวกเวกเตอร์ในกรณีดังต่อไปนี้

- $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(3,4),\vec{c}=(5,6)$ $\qquad \vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$
- $\vec{a}=(0,0),\vec{b}=(-1,1),\vec{c}=(2,-3),\vec{d}=(3,-1)$ $\qquad \vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=$

13. จงใช้โปรแกรมการรวมเวกเตอร์ของ PhET เพื่อหาเวกเตอร์ลัพธ์ของการบวกเวกเตอร์ในกรณีดังต่อไปนี้

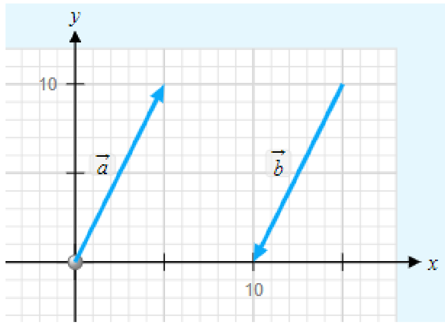
- $\vec{a}=\left(5,\angle 30^{\circ}\right),\vec{b}=\left(5,\angle 60^{\circ}\right),\vec{c}=\left(5,\angle 120^{\circ}\right)$ $\qquad \vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$
- $\vec{a}=\left(8,\angle 150^{\circ}\right),\vec{b}=\left(9,\angle -90^{\circ}\right),\vec{c}=\left(8,\angle 30^{\circ}\right)$ $\qquad \vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$

นิเสธของเวกเตอร์ (negative of a vector)

นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{a}$ ใด ๆ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ $\vec{a}$ แต่มีทิศตรงกันข้ามกับทิศของเวกเตอร์ $\vec{a}$

นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{a}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $-\vec{a}$

รูปที่ 8 แสดงภาพของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ โดย $\vec{b}$ เป็นนิเสธของเวกเตอร์ $\vec{a}$



รูปที่ 8

การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์ $\vec{a}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{b}$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{a}-\vec{b}$ คือการบวกเวกเตอร์ $\vec{a}$ ด้วยนิเสธของเวกเตอร์ $\vec{b}$ นั่นคือ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

14. เมื่อ $\vec{a}=(-2,2),\vec{b}=(3,1),\vec{c}=(-4,-3),\vec{d}=(1,-2)$ จงหาผลรวมของเวกเตอร์ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$

15. เมื่อ $\vec{a}=\left(2,\angle 60^\circ\right),\vec{b}=\left(4,\angle 120^\circ\right),\vec{c}=\left(5,\angle -30^\circ\right)$ จงหาผลรวมของเวกเตอร์ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์ $\vec{a}$ ด้วยสเกลาร์ α ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\alpha\vec{a}$ ทำได้โดยการคูณส่วนประกอบแต่ละตัวของเวกเตอร์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนด้วยสเกลาร์ดังนี้ $\alpha\vec{a}=\alpha\left(a_x,a_y\right)=\left(\alpha a_x,\alpha a_y\right)$

ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์จะต่างจากขนาดและทิศทางของ $\vec{a}$ หรือไม่ขึ้นกับค่าของสเกลาร์ดังนี้

- $\alpha=0$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\alpha\vec{a}$ เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับศูนย์ และมีทิศทางใดก็ได้
- $\alpha=1$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\alpha\vec{a}$ เท่ากับเวกเตอร์
- $\alpha=-1$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\alpha\vec{a}$ มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ $\vec{a}$ แต่มีทิศตรงกันข้าม
- $\alpha>1$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\alpha\vec{a}$ มีขนาดมากกว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และมีทิศทางเดียวกัน
- $0<\alpha<1$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\alpha\vec{a}$ มีขนาดน้อยกว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และมีทิศทางเดียวกัน
- $\alpha<-1$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\alpha\vec{a}$ มีขนาดมากกว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม
- $-1<\alpha<0$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\alpha\vec{a}$ มีขนาดน้อยกว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

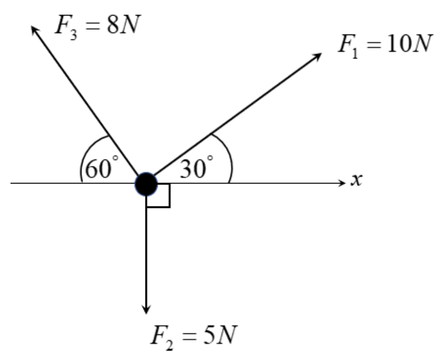
16. จงหาเวกเตอร์ลัพธ์ในกรณีดังต่อไปนี้

- $\vec{a} = (1,2), \alpha = 4,$ $\quad \vec{s} = \alpha\vec{a} =$
- $\vec{a} = (-4,5), \alpha = -2,$ $\quad \vec{s} = \alpha\vec{a} =$
- $\vec{a} = (5, \angle 30^\circ), \alpha = 0.1,$ $\quad \vec{s} = \alpha\vec{a} =$
- $\vec{a} = (4, \angle 120^\circ), \alpha = -2,$ $\quad \vec{s} = \alpha\vec{a} =$

17. เมื่อ $\vec{a} = (-2,2), \vec{b} = (3,1), \vec{c} = (-4,-3)$ จงหาเวกเตอร์ลัพธ์ในกรณีดังต่อไปนี้

- $\vec{s} = \vec{a} - 2\vec{b} =$
- $\vec{s} = -0.5\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} =$
- $\vec{s} = (\vec{a} + 2\vec{b}) - (3\vec{c} + 2\vec{b}) =$

18. วัตถุทรงกลมถูกแรงสามแรงกระทำดังรูปที่ 9 จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุดังกล่าว



รูปที่ 9